Nella Scheda "Continuità in un punto e in un Intervallo" si è detto che:

Una funzione y = f(x) si dice continua in un punto x_0 se:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

e che, per verificare la continuità di una funzione in un punto, si devono verificare tre condizioni:

1. Deve esistere ed essere finito il valore della funzione in x_0 cioè $\mathbf{f(x_0) = h}$
2. Devono esistere finiti ed essere uguali i limiti $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \mathbf{k}$
3. Il valore del limite al precedente punto 1. deve essere uguale al valore della funzione al punto 2., cioè **h = k**

Qualora una delle tre su indicate condizioni **non** si verifica, il punto x_0 si dice **punto di discontinuità.**

Graficamente in corrispondenza di un punto di discontinuità la funzione si spezza; in relazione al tipo di interruzione del grafico di una funzione, si classificano tre specie di discontinuità.

Discontinuità di 1^ specie

Si dice che una funzione presenta in un punto x_0 una discontinuità di 1^ specie se:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_2 \quad \text{con } l_1 \neq l_2$$

cioè se il limite a destra di x_0 e quello a sinistra esistono, sono finiti ma sono diversi.

In tal caso la differenza $|l_1 - l_2|$ = salto della funzione.

Esempio 1: Data la funzione $y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x+1}}}$ individuare il punto di discontinuità e la relativa specie.

Il dominio della funzione è $\forall\ x \in]-\infty; -1[\ \cup\ ]-1; +\infty[$; poiché la funzione non esiste in x = -1, si deduce che, non essendo verificata la prima condizione di continuità, x = -1 è un punto di discontinuità.

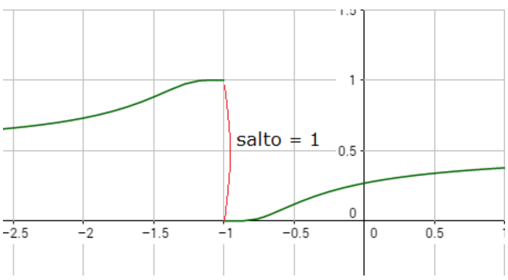
Per classificarlo, calcoliamo i limiti a destra e a sinistra di questo punto

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x+1}}} = \frac{1}{1+e^{\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}}} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x+1}}} = \frac{1}{1+e^{\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}}} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^+}}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

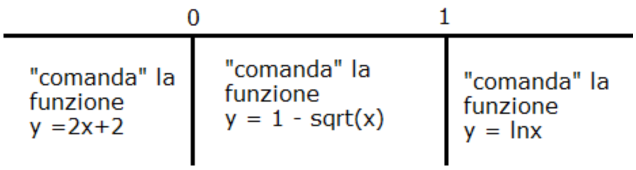
Vediamo che il limite a destra e quello a sinistra sono finiti ma diversi $\mathbf{l_1 = 1 \neq l_2 = 0}$

La quantità |1 – 0 | = 1 è il salto della funzione; la funzione si spezza in due parti detti "rami" come si vede nella figura



Esempio 2: Data la funzione $y = \begin{cases} 2x+2 & se\ x<0 \\ 1-\sqrt{x} & se\ 0<x<1 \\ lnx & se\ x \geq 1 \end{cases}$ individuare i/il punti/o di discontinuità e la relativa specie.

Si tratta di esaminare una funzione "a tratti" (o "per casi"). Per una funzione del genere i punti di discontinuità vanno ricercati anche nei "punti di raccordo", cioè in quei punti che delimitano le fasce di piano nei quali da una funzione si passa ad un'altra. Nella funzione in esame i punti di raccordo sono x = 0 e x = 1.



Per vedere se questi punti sono di discontinuità dobbiamo calcolare i limiti a destra e a sinistra di questi punti tenendo conto dello schema di "comando" esplicitato in figura

Analizziamo il comportamento della funzione in x = 0

$\lim_{x\to 0^-} 2x+2 = 2$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} 1-\sqrt{x} = 1$

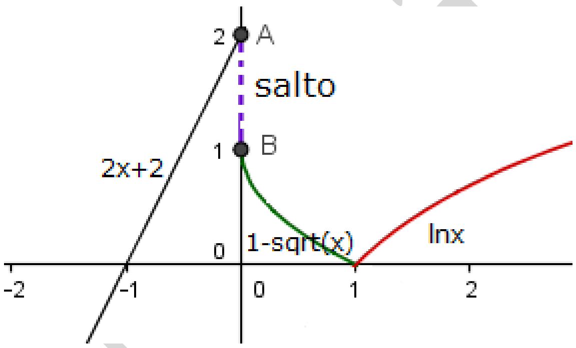
Poiché i due limiti sono **finiti** e **diversi** diciamo che in x = 0 la funzione presenta una discontinuità di 1^ specie con salto | 2 – 1 | = 1

Analizziamo ora il comportamento della funzione in x = 1 (consideriamo che in x = 1 la funzione vale

y = lnx = ln 1 = 0)

$\lim_{x\to 1^-} 1-\sqrt{x} = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} lnx = 0$

Poiché in x = 1 i due limiti sono coincidenti e sono uguali al valore della funzione in x = 0, allora deduciamo che x = 1 NON è un punto di discontinuità. Il grafico della funzione è riportato in figura.



Discontinuità di 2^ specie

Si dice che una funzione presenta in un punto x_0 una discontinuità di 2^ specie se:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \quad \textbf{(1)}$$

oppure se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = k \quad \textbf{o viceversa} \quad \textbf{(2)}$$

oppure se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \text{non esiste} \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \quad \textbf{o viceversa} \quad \textbf{(3)}$$

Se si verifica il caso (1) la funzione ha un comportamento asintotico e $x = x_0$ è l'equazione di un asintoto verticale a destra e a sinistra (asintoto completo a dx e sin)

Se si verificano i casi (2) oppure (3), la funzione ha un comportamento asintotico o solo a destra o solo a sinistra di $x = x_0$.

Nella figura 1. la funzione in $x = x_0$ ha una discontinuità di 2^ specie, infatti dal grafico si vede che

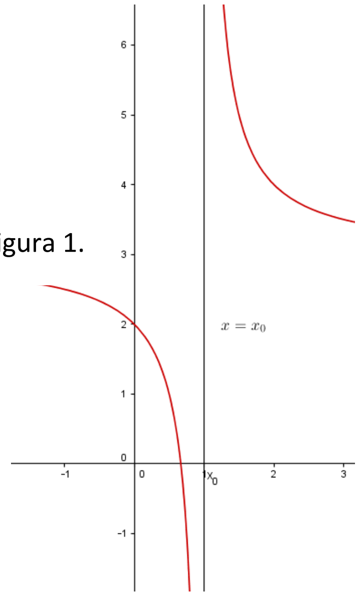


Figura 1.

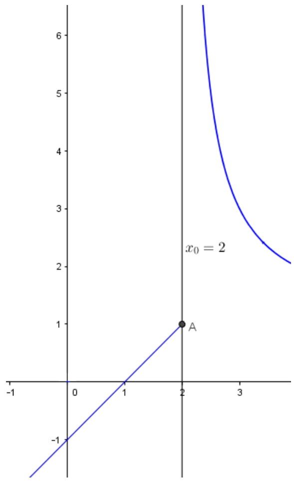
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

La retta di equazione x = 1 è un **asintoto verticale a destra e a sinistra (completo).**

Nella figura 2. la funzione in $x_0 = 2$ ha un **asintoto verticale** ma solo a **destra**, la descrizione analitica di questo caso è:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \qquad e \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

Figura 2.



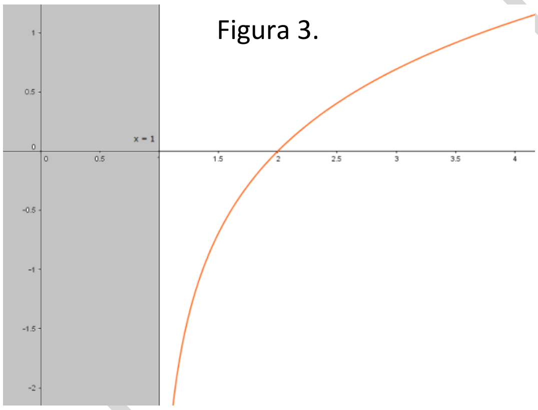


Figura 3.

Nella figura 3. la funzione ha in x = 1 un asintoto **verticale a destra**, a sinistra la funzione non esiste; la descrizione analitica di questo caso è:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \text{non esiste} \qquad e \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

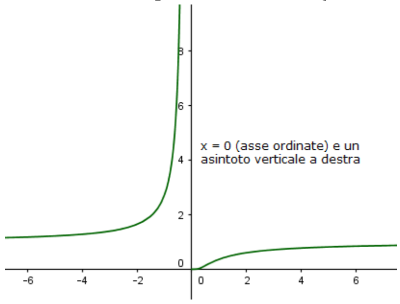
Esempio 1: Data la funzione $y = e^{-\frac{1}{x}}$ individuare il punto di discontinuità e la relativa specie.

Il Dominio della funzione è $\forall\ x \in]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$. Poiché la funzione non è definita in x = 0, non essendo rispettata la prima condizione di continuità, diciamo che x = 0 è un punto di discontinuità.

Per classificarlo calcoliamo i limiti a destra e a sinistra di 0:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \left[e^{-\frac{1}{0^-}}\right] = \left[e^{-(-\infty)}\right] = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \left[e^{-\frac{1}{0^+}}\right] = \left[e^{-(+\infty)}\right] = e^{-\infty} = 0$$

Questi risultati ci dicono che x =0 è un punto di discontinuità di 2^ specie e che la retta di equazione x = 0 (l'asse delle ordinate) per la funzione è un asintoto verticale a sinistra. Il grafico è quello in figura

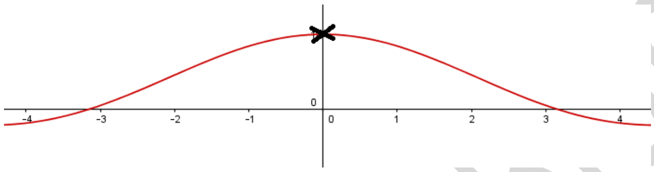


Discontinuità di 3^ specie

Si dice che una funzione presenta in un punto x_0 una discontinuità di 3^ specie se:

1. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ *e* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$
2. **la funzione non è definita in x_0, oppure $f(x_0) \neq l$**

Questa tipologia di discontinuità in x_0 si dice **eliminabile :** poiché l'unico punto in cui la funzione non è continua è SOLO il punto x_0 mentre è continua in tutti gli infiniti punti vicini ad esso. Dobbiamo pensare che è come se la nostra funzione avesse un piccolo taglio SOLO in $x = x_0$ mentre procede con continuità, senza interruzioni, in tutti gli altri infiniti punti immediatamente vicino ad esso avvicinandosi sempre di più al valore **l** (valore verso cui tende il limite a destra e a sinistra). Poiché questo "taglio" è "visibile" solo zummando su questo punto infinitamente, ai nostri occhi, macroscopicamente, la funzione appare "quasi continua". I grafici che descrivono questa situazione sono di questo tipo:



Esempio 1: Data la funzione $y = \frac{senx}{x}$ individuare il punto di discontinuità e la relativa specie.

Il Dominio della Funzione è $\forall$ x $\in]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty[$. Poiché la funzione non è definita in x = 0, si ha che questo punto è di discontinuità. Per classificarlo, calcoliamo i limiti a destra e a sinistra di x = 0

$\lim_{x\to 0^-} \frac{senx}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{senx}{x} = 1$

Questo significa che avvicinandoci sempre più a 0 (da sinistra e da destra) il valore della funzione si avvicina sempre più a 1 (anche se non arriverà mai a toccare questo valore; però possiamo renderci conto che non arriverà mai a toccare il valore 1 SOLO se noi riuscissimo a zummare infinitamente su questo punto! E quindi possimo pensare ad una "quasi continuità"! Tutto questo si esprime "eliminando la discontinuità ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x} & \forall x \in]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty[\\ 1 & per\ x = 0 \end{cases}$$

Esempio 2: Data la funzione $y = \begin{cases} x^2 + 2x & se\ x < 0 \\ 2 & se\ x = 0 \\ x^2 - 2x & se\ x > 0 \end{cases}$ individuare il punto di discontinuità e la relativa specie.

Si tratta di una funzione a tratti e, come abbiamo già detto in precedenza, la funzione potrebbe avere una discontinuità nel punto di raccordo x = 0. Calcoliamo allora i limiti a destra e a sinistra, tenendo conto degli intervalli in cui le varie funzioni "comandano".

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 + 2x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^2 - 2x = 0$$

Osserviamo che i due limiti sono uguali ma che in x = 0 la funzione sia 2.

Si tratta allora di una discontinuità di 3^ specie.

Graficamente la situazione è rappresentata in figura. Avvicinandoci infinitamente a 0 la funzione prende valori sempre più vicini a 0 (i due rami della funzione entrambi si avvicinano all'origine degli assi), però NEL punto 0 la funzione NON prende valore 0 bensì "salta" al valore 2 e poi riprende a procedere vicinissima al valore 0