Scheda: Calcolo di Integrali Indefiniti – Prof.ssa Biondina Galdi

COME PROCEDERE PER CALCOLARE ALCUNE TIPOLOGIE DI INTEGRALI INDEFINITI

Bisogna classificare la funzione integranda.
Se la funzione integranda è:

1. **UNA FUNZIONE ELEMENTARE →** si consulta la tabella degli integrali immediati:

$\int a\,dx = ax + c$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{con } n \neq -1$	$\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x\rvert + c$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$	$\int (1 + tg^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$	$\int (1 + ctg^2 x)dx = \int \frac{1}{sen^2 x} dx = -ctgx + c$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arccos x + c \\ -\operatorname{arcsen} x + c \end{cases}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$

2. **UNA FUNZIONE COMPOSTA →** si consulta la tabella degli integrali riconducibili ad immediati:

$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log\lvert f(x)\rvert + c$	$\int f'(x) \cos f(x) dx = sen\, f(x) + c$
$\int f'(x)\, sen\, f(x) dx = -\cos f(x) + c$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\log_e a} + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} dx = \begin{cases} \operatorname{arcsen} f(x) + c \\ -\arccos f(x) + c \end{cases}$	$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tgf(x) + c$

3. **UNA FUNZIONE RAZIONALE FRATTA** che non rientra tra le precedenti; bisogna distinguere tra i seguenti casi:

3.1 **al numeratore c'è un polinomio, al denominatore un monomio**
→ si decompone la frazione dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio; ricordando che l'integrale di una somma algebrica è la somma algebrica degli integrali, si può ora calcolare l'integrale perché nella forma 1;

Esempio: $\int \frac{3x^3 - x + 4x^2}{x^2} dx = \int \left(3x - \frac{1}{x} + 4\right) dx = \int 3xdx - \int \frac{1}{x} dx + \int 4dx = 3\frac{x^2}{2} - \ln\lvert x\rvert + 4x + c$

3.2 **al numeratore c'è un polinomio g(x) di grado m e al denominatore uno h(x) di grado n, con m ≥ n →** si decompone la frazione dividendo il numeratore g(x) per il denominatore h(x): si otterrà un quoziente q(x) ed un resto r(x); scrivendo allora la funzione integranda come

$$\frac{g(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)} \qquad *$$

si otterrà un integrale generalmente di più facile integrazione

Esempio: $\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} dx$ procediamo alla divisione tra il numeratore e il denominatore

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 3 & x - 2 \\ \hline -x^2 + 2x & x + 4 \\ \hline // \quad 4x - 3 & \\ -4x + 8 & \\ \hline // \quad 5 & \end{array}$$

q(x) = x + 4 r(x) = 5

Pertanto, tenendo conto della *, possiamo scrivere:

$$\int \frac{x^2+2x-3}{x-2}dx = \int\left(x+4+\frac{5}{x+4}dx\right) = \int xdx + \int 4dx + 5\int \frac{1}{x+4}dx = \frac{x^2}{2}+4x+5\ln|x+4|+c$$

3.3 **al numeratore c'è un polinomio g(x) di grado m e al denominatore uno h(x) di grado n, con m < n** → si scompone il denominatore;
si possono verificare 3 casi:

3.3.1 **il denominatore si scompone in n fattori di primo grado con molteplicità 1**(tutti fattori diversi con esponente 1) → si decompone la frazione applicando il *metodo dei coefficienti indeterminati* come riportato nell'esempio

Esempio:
$$\int \frac{12x-11}{x^2-4x+3}dx = \int \frac{12x-11}{(x-1)(x-3)}dx \qquad (1)$$

$$\frac{12x-11}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-3} = \frac{ax-3a+bx-b}{(x-1)(x-3)} = \frac{x(a+b)-3a-b}{(x-1)(x-3)}$$

affinché l'eguaglianza sussista deve essere 12 = a + b e -11 = - 3a – b
I valori dei coefficienti a e b vengono determinati risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a+b=12 \\ 3a+b=11 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a=-1/2 \\ b=25/2 \end{matrix}$$ pertanto, sostituendo in (1)

$$\int \frac{12x-11}{x^2-4x+3}dx = \int \frac{12x-11}{(x-1)(x-3)}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx + \frac{25}{2}\int\frac{1}{x-3}dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{25}{2}\ln|x-3|+c$$

3.3.2 **il denominatore si scompone in n fattori di primo grado qualcuno con molteplicità ≠ 1** (qualche fattore con esponente ≠ 1) → si decompone la frazione applicando il metodo dei coefficienti indeterminati come riportato nell'esempio

Esempio:
$$\int \frac{x^2+2x+3}{2x^4-11x^3+18x^2-4x-8}dx = \int \frac{x^2+2x+3}{(x-2)^3(2x+1)}dx$$ [il fattore (x-2) si presenta 3 volte] (2)

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-2)^3(2x+1)} = \frac{a}{(x-2)^3}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{c}{(x-2)}+\frac{d}{(2x+1)} =$$

$$= \frac{a(2x+1)+b(x-2)(2x+1)+c(2x+1)(x-2)^2+d(x-2)^3}{(x-2)^3(2x+1)} =$$

$$= \frac{(2c+d)x^3+(2b-7c-6d)x^2+(2a-3b+4c+12d)x+(a-2b+4c-8d)}{(x-2)^3(2x+1)}$$

affinché l'eguaglianza sussista deve essere
2c+d = 0 2b - 7c – 6d = 1 2a - 3b+4c+12d = 2 a - 2b+4c - 8d = 3
I coefficienti a, b, c, d vengono determinati risolvendo il sistema formato dalle quattro eguaglianze che dà come risultato:

$$a=\frac{11}{5} \qquad b=\frac{8}{25} \qquad c=\frac{9}{125} \qquad d=-\frac{18}{125}$$ sostituendo tali valori nella (2) si ottiene:

$$\int \frac{x^2+2x+3}{2x^4-11x^3+18x^2-4x-8}dx = \int \frac{x^2+2x+3}{(x-2)^3(2x+1)}dx =$$

$$= \frac{11}{5}\int (x-2)^{-3}dx + \frac{8}{25}\int (x-2)^{-2}dx + \frac{9}{125}\int\frac{1}{(x-2)}dx - \frac{18}{125}\int\frac{1}{2x+1}dx =$$

$$-\frac{11}{10}\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{8}{25}\frac{1}{(x-2)} + \frac{9}{125}\ln|x-2| - \frac{9}{125}\ln|2x+1|+c$$

3.3.3 **il denominatore si scompone in fattori di primo grado con molteplicità 1 e in fattori di 2° grado non scomponibili (con Δ < 0)** → si decompone la frazione applicando il metodo dei coefficienti indeterminati come riportato nell'esempio

Esempio: $\int \frac{x+1}{x^3-1} = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$ il trinomio $x^2 + x + 1$ non è scomponibile avendo $\Delta < 0$ (3)

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} = \frac{ax^2+ax+a+bx^2-bx+cx-c}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

affinché l'eguaglianza sussista deve essere

a + b = 0 *a-b+c = 1* *a – c = 1*

I coefficienti a, b, c, d vengono determinati risolvendo il sistema formato dalle tre eguaglianze che dà come risultato:

$a = \frac{2}{3}$ $b = -\frac{2}{3}$ $c = -\frac{1}{3}$ sostituendo tali valori nella (2) si ottiene:

$$\int \frac{x+1}{x^3-1} = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{\frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + c$$

3.4 **al numeratore c'è una costante e al denominatore un polinomio di 2° grado non scomponibile** (Δ < 0)

$$\int \frac{n}{ax^2+bx+c}dx \qquad \text{con } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$ax^2 + bx + c$ avendo $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, non si può scomporre e quindi, per risolvere l'integrale, non si può applicare il metodo dei coefficienti indeterminati. Per calcolare questo integrale, in generale, si procede così:

1) aggiungendo o sottraendo dei numeri opportuni si cerca di ottenere al denominatore un quadrato di un binomio + numero: $(hx+e)^2 + n$
2) se il numero n è diverso da 1, si mette questo numero in evidenza al denominatore:

$$n\left[\frac{(hx+e)^2}{n} + 1\right]$$

3) si "aggiusta" il quadrato: $n\left[\left(\frac{hx+e}{\sqrt{n}}\right)^2 + 1\right]$
4) moltiplicando/dividendo si fa comparire al numeratore la derivata di $\frac{hx+e}{\sqrt{n}}$

Esempio: $\int \frac{1}{9x^2-6x+5}dx$ $\Delta = 36 - 180 = -144 < 0$

1) Osserviamo che $9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$ quindi riscriviamo l'integrale aggiungendo e sottraendo al denominatore 1

$$\int \frac{1}{9x^2-6x+5}dx = \int \frac{1}{9x^2-6x+1-1+5}dx = \int \frac{1}{(3x-1)^2+4}dx$$

2) In questo modo abbiamo ottenuto al denominatore il quadrato di un binomio + 4.
3) Poiché 4 ≠ 1, mettiamolo in evidenza

$$\int \frac{1}{4\left[\frac{(3x-1)^2}{4} + 1\right]}dx$$

4) "Aggiustiamo" il quadrato riscrivendo $\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2+1\right]}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+1}dx$

5) Poiché la derivata di $\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}$ è 3/2, moltiplichiamo e dividiamo l'integrale per questo numero, ottenendo

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\int \frac{3/2}{\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{6}\int \frac{3/2}{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{6}arctg\left(\frac{3x-1}{2}\right)+k$$

Per calcolare l'integrale $\int \frac{n}{x^2+bx+c}dx$, oltre al procedimento su indicato, si può applicare la formula

$$\frac{2n}{\sqrt{-\Delta}}arctg\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}+k$$

3.5 **al numeratore c'è un polinomio di 1° grado e al denominatore un polinomio di 2° grado non scomponibile** ($\Delta < 0$)

$$\int \frac{hx+n}{ax^2+bx+c}dx \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$ax^2 + bx + c$ avendo $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, non si può scomporre e quindi, per risolvere l'integrale, non si può applicare il metodo dei coefficienti indeterminati. In generale, per calcolare questo integrale si procede così:

1) aggiungendo/sottraendo, moltiplicando/dividendo si fa "comparire" al numeratore la derivata del denominatore;
2) si decompone l'integrale in un integrale di funzioni fratte immediato del tipo

$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln\left|ax^2+bx+c\right|$ e un integrale del tipo:

$\int \frac{n}{ax^2+bx+c}dx$ con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ che si risolve con il procedimento indicato sopra.

Esempio: $\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx =$

Osserviamo che la derivata di $x^2 + 4x + 5$ è $2x+4$

1. per far "comparire" la derivata al numeratore, moltiplichiamo e dividiamo per 2 e aggiungiamo e sottraiamo 4

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4+6}{x^2+4x+5}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-4+6}{x^2+4x+5}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{1}{x^2+4x+5}dx =$$

Il primo integrale è immediato, il secondo si risolve con il metodo spiegato sopra.

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right| + \int \frac{1}{x^2+4x+4-4+5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right| + \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right| + arctg\,(x+2)+k$$

Altri esempi di calcolo di integrale risolvibili con una combinazione dei metodi sopra esposti.
– riferimento 3.3.3. e 3.5 e 3.3 –

Esempio 1

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$$ il trinomio $x^2 + x + 1$ non è scomponibile avendo $\Delta < 0$ (3)

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} = \frac{ax^2+ax+a+bx^2-bx+cx-c}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

affinché l'eguaglianza sussista deve essere
a + b = 0 a – b + c = 0 a - c = 1
I coefficienti a, b, c vengono determinati risolvendo il sistema formato dalle tre eguaglianze che dà come risultato:

$$a = \frac{1}{3} \qquad b = -\frac{1}{3} \qquad c = -\frac{2}{3}$$

Sostituendo nella (3) si ha

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \qquad (4)$$

Il primo integrale è riconducibile agli integrali immediati, per risolvere il secondo dobbiamo procedere come descritto al 3.5

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+1}dx$$

(5)

Calcoliamo a parte l'integrale

$$\frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]} = 2\int \frac{dx}{\left\{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1\right\}} =$$

S

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{\left\{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1\right\}} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+c \qquad (6)$$

ostituendo i risultati (5) e (6) nel (4) si ha i definitiva che:

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+c\right] =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+c$$

Esempio 2

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \qquad (1)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a(x+1)(x^2+1)+b(x-1)(x^2+1)+(cx+d)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} =$$

Svolgendo i calcoli si vede che affinché l'eguaglianza sussista deve essere.
a + b + c = 0 a – b + d = 0 a + b + c = 0 a – b + d = 1

risolvendo il sistema si ottiene $a = \frac{1}{4} \qquad b = -\frac{1}{4} \qquad c = -\frac{1}{2}$

pertanto l'integrale è:

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}arctgx + c$$

4. **INTEGRAZIONE PER PARTI :** si ricorre a questo procedimento quando “sotto l’integrale” si presenta il prodotto di due funzioni di cui una si può esprimere come derivata di un’altra.
Il procedimento deriva dalla regola di derivazione di un prodotto D[f(x) g(x)] = f’(x) g(x) + f(x) g’(x) da cui passando all’integrale

$$\int \mathrm{D[f(x)\ g(x)]\ dx} = \int \mathrm{f'(x)\ g(x)dx} + \int \mathrm{f(x)\ g'(x)dx} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{f(x)\ g(x)} = \int \mathrm{f'(x)\ g(x)dx} + \int \mathrm{f(x)\ g'(x)dx} \ \Rightarrow$$

$$\int \mathrm{f'(x)\ g(x)dx} = f(x)g(x) - \int \mathrm{f(x)\ g'(x)dx} \qquad \text{o anche} \int D[f(x)]g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)D[g(x)]dx$$

Quest’ultima eguaglianza esprime la regola dell’integrazione per parti

Esempio 4.1: $\int x\cdot e^x dx = \int D(e^x)\cdot x dx = xe^x - \int e^x D(x)dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

Esempio 4.2:

$$\int (\ln x)dx = \int D(x)(\ln x)dx = x\ln x - \int xD(\ln x)dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$$

Esempio 4.3:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx = 2\int D(\sqrt{x})\ln x\cdot dx = 2\left[\sqrt{x}\ln x - \int \sqrt{x}D(\ln x)dx\right] =$$

$$2\left[\sqrt{x}\ln x - \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx\right] = 2\left[\sqrt{x}\ln x - \int x^{-\frac{1}{2}}dx\right] = 2\left[\sqrt{x}\ln x - 2x^{\frac{1}{2}} + c\right] = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c$$

4. **INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE**: quando nessuno dei metodi precedenti può essere applicato si vede se l’integrale può presentarsi in una forma più semplice operando un cambio di variabile. E’ solo l’esercizio costante e l’allenamento che ci permetterà di capire quale sostituzione conviene fare, all’inizio si dovrà procedere per tentativi.

Esempio 5.1 :

$$\int 2tg^3 x dx \quad poniamo\ tgx = t\ da\ cui\ derivando\ (1+tg^2x)dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+tg^2x} = \frac{dt}{t^2+1}$$

$$facendo\ le\ sostituzioni\ 2\int t^3\cdot\frac{dt}{1+t^2} = 2\int tdt - \int \frac{2t}{t^2+1}dt = t^2 - \ln|t^2+1| + c = tg^2x - \ln|tg^2x+1| + c$$

Esempio 5.2:

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = \quad poniamo\ \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt \Rightarrow dx = 2tdt$$

$$sostituendo\ \int \frac{2t+2t^3}{1+t}dt = \int\left(2t^2 - 2t + 4 - \frac{4}{1+t}\right)dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 4t - 4\ln|1+t| + c =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + c$$